1.1.11 Poměry a úměrnosti I

Předpoklady: základní početní operace, 010110

Pedagogická poznámka: Následující látka bohužel patří mezi ty, kde je nejvíce rozšířené používání samospasitelných postupů, které umožňují počítat bez pochopení problému a dojít ke správným výsledkům, pokud se neustále opakují příklady stejného typu. Autor učebnice nechce polemizovat o tom, zda je takový postup nutný u slabších žáků základních škol, je však přesvědčený, že je naprosto nevhodný u všech studentů, které kdy učil na gymnáziu.
Hlavně proto, že mnozí mají takové postupy rádi a docházejí k názoru, že v matematice není nutné nebo dokonce správné věcem rozumět a stačí si pamatovat „jak se to dělá“. Přitom by to snadno pochopili.
Například kreslení šipek určitě ulehčuje výpočty ve chvíli, kdy se přímá úměrnost probírá, ale po roce už si studenti často pamatují pouze to, že mají šipky nakreslit, ne však jakým způsobem a proč to vlastně dělají. Pokud se naučí si napsat dvě srovnávací řádky a pak se zamyslí, je jejich dovednost daleko trvalejší.

Př. 1: Při výrobě betonu se míchává písek (bílý, zvaný na Strakonicku „chlumák“) s cementem v poměru 4:1. Co tato věta znamená?

Správná odpověď může znít různě. Některé varianty:
a) písku je v betonu čtyřikrát víc
b) na každou lopatu cementu, musíme přidat čtyři lopaty písku
c) kdybychom vydělili hmotnost písku v betonu hmotností cementu, dostali bychom čtyři.
…

Pedagogická poznámka: Při kontrole řešení říkám žákům, že schopnost vyjádřit poznatek různými způsoby napovídá o skutečném pochopení.

Poznámka: Ve všech následujících úkolech budeme zanedbávat fakt, že do betonu se mimo písek a cement přidává i voda.
Poznámka: Ve všech následujících úkolech nebudeme rozlišovat „objemový“ (lopaty) poměr a hmotnostní (kg) poměr.

Př. 2: Kolik písku musíme přidat ke 12 lopatám cementu.

Platí: $\frac{písek}{cement}=\frac{4}{1}=\frac{x}{12} \Rightarrow$ rovnice $4=\frac{x}{12}$.
$x=4\cdot12=48$
Musíme přidat 48 lopat písku.

Poznámka: Samozřejmě nejrychleji spočítáme příklad úvahou. Písku má být čtyřikrát více než cementu $\Rightarrow$ $x=4\cdot12=48$.

Př. 3: Kolik cementu je třeba přidat k 80 kg písku?

Platí: $\frac{\textit{písek}}{\textit{cement}} = \frac{4}{1} = \frac{80}{x}$ $\Rightarrow$ rovnice $4 = \frac{80}{x}$.

$x = \frac{80}{4} = 20\,\text{kg}$

Musíme přidat 20 kg cementu.

Poznámka: Samozřejmě nejrychleji spočítáme příklad úvahou. Písku má být čtyřikrát více než cementu $\Rightarrow$ cementu tedy čtyřikrát méně $\Rightarrow$ $x = \frac{80}{4} = 20\,\text{kg}$.

Př. 4: Kolik cementu a kolik písku bude třeba k přípravě 500 kg betonu?

Pokud mícháme v poměru 4:1 – dáváme dohromady 5 dílů (čtyři písku a jeden cementu) $\Rightarrow$ zjistíme hmotnost jednoho dílu: $500 : 5 = 100\,\text{kg}$.

Cementu dáváme jeden díl $\Rightarrow$ 100 kg.

Písku čtyři díly: $4 \cdot 100 = 400\,\text{kg}$.

K přípravě 500 kg betonu potřebujeme 100 kg cementu a 400 kg písku.

Př. 5: Ovocný sirup se ředí s vodou v poměru $2:7$. Urči, které směsi odpovídají návodu (množství sirupu udáváme první).

a) sirup: 1 l; voda 3,5 l

b) sirup: 26 ml; voda 90 ml

c) sirup: 14 l; voda 49 l

d) sirup: 140 ml; voda 40 ml

Napíšeme si poměry složek ze zadání a zkusíme je upravit na poměr 2:7.

a) $\frac{1}{3,5} = \frac{1}{3,5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{7}$ - správná směs.

b) $\frac{26}{90} = \frac{13}{45}$ - poměr nejde dál krátit a nerovná se 2:7 $\Rightarrow$ špatná směs.

c) $\frac{14}{49} = \frac{2}{7}$ - správná směs.

d) $\frac{140}{40}$ - poměr nemá ani smysl upravovat, je určitě větší než 1 $\Rightarrow$ špatná směs.

Poznámka: Je také možné si poměry převést na desetinná čísla a ta pak porovnávat.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je první, u kterého se objevují problémy. Z neznámého důvodu je pro studenty těžké upravovat poměry rozšiřováním, často používají neuvěřitelně složité a neprůhledné postupy. Pomalejší žáky nechávám, aby ho vynechali a tak jsme stihli společně příklad 6 a zbylo nám 25 minut na druhou část hodiny.

Př. 6: Trojsložková mastička se skládá ze složek A, B a C. Složky A a B se mísí v poměru 2:3, složky B a C v poměru 2:1. Urči poměr všech tří složek.

Napíšeme si poměry pod sebe a chybějící čísla doplníme písmeny:

A:B je $2:3$ A:B:C je $2:3:\square$

B:C je $2:1$ A:B:C je $\square:2:1$

Poměry $2:3:\square$ a $\square:2:1$ jsou stejné $\Rightarrow$ musí mít na stejných místech stejná čísla $\Rightarrow$ v obou poměrech známe počet dílů složky B $\Rightarrow$ rozšíříme si poměry tak, aby pro složku B bylo v obou poměrech stejné číslo.

$2:3:\square \quad / \cdot 2$

$\square:2:1 \quad / \cdot 3$

$4:6:\square$

$\square:6:3$

Složky mícháme v poměru $4:6:3$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je ukázkou dvoukrokové matematické strategie: zjistím, jak to potřebuji, napíšu si to tak.

Pomocí poměrů se řeší i příklady na přímou a nepřímou úměrnost.

Přímá úměrnost

Přímá úměrnost je úměrnost mezi dvěma veličinami, které společně rostou ve stále stejném poměru („čím víc, tím víc“):

- počet odpracovaných hodin a počet dní (pokud každý den odpracujeme stejný počet hodin),
- počet výrobků a počet krabic s nimi (pokud každá krabice obsahuje stejný počet výrobků),
- cena a počet nakoupených předmětů (pokud každý z nich stojí stejně).

Př. 7: Rozhodni, jaké podmínky musí být splněny, aby následující dvě veličiny byly v přímé úměrnosti.
a) počet dělníků a množství vykonané práce
b) objem kapaliny a její hmotnost
c) doba parkování a zaplacená částka
d) doba jízdy a ujetá vzdálenost

a) počet dělníků a množství vykonané práce
Každý dělník vykoná stejné množství práce.

b) objem kapaliny a její hmotnost
Každá jednotka objemu má stejnou hmotnost (kapalina má stejnou hustotu, nebo jde pořád o stejnou kapalinu).

c) doba parkování a zaplacená částka
Za každou minutu parkování platíme stejnou částku.

d) doba jízdy a ujetá vzdálenost
Za každou hodinu ujdeme stejnou vzdálenost (jedeme pořád stejně rychle).

Příklady na přímou úměrnost se řeší pomocí „trojčlenky“. My budeme její zápis používat, ale spíše než na kreslení šipek se budeme spoléhat na to, co už víme – plnění podmínek, které musí platit, aby veličiny rostly stále ve stejném poměru.

Př. 8: Patnáct rohlíků stojí 28, 50 Kč. Urči, kolik by stálo 25 rohlíků.

Zapíšeme znalosti o přímé úměře.
15 rohlíků … 28,50 Kč
25 rohlíků … x Kč

Obě veličiny porostou přímou úměrností, když každý rohlík stojí stejně.

Cena rohlíku z první řádky: $\frac{28,50}{15}$.

Cena rohlíku z druhé řádky: $\frac{x}{25}$.

Cena jednoho rohlíku se nemění: $\frac{28,50}{15} = \frac{x}{25}$.

$x = \frac{28,50}{15} \cdot 25 = 47,50\,\text{Kč}$

25 rohlíků stojí 47,50 Kč.

Na konci každého příkladu bychom se měli zamyslet, zda výsledek splňuje základní očekávání. U předchozího příkladu bychom se sami sebe měli zeptat: "Je logické, aby více rohlíků stálo více peněz?"
Tato otázka není zbytečná, s její pomocí snadno odhalíme nejčastější chybu při záměně přímé a nepřímé úměrnosti.

Pedagogická poznámka: Chci po žácích, aby si otázku o logičnosti výsledku kladli sami a automaticky. U příkladů se špatně určeným druhem úměrnosti je tato otázka první pomocí (v naprosté většině případů zcela dostačující), po níž se většina žáků chytá za hlavu a příklad dodělá správně.

Poznámka: Řešení sice vypadá delší, ale pouze proto, že jsme je pomalu rozepisovali. Stačí pouze dva řádky (používané i při klasickém postupu) a rovnice z poměrů (napíšeme samostatně poměry a pak mezi ně znaménko rovná se).

Pedagogická poznámka: Při chození mezi lavicemi se u všech snažím, aby zápis obsahoval rovnost úměr, vyjádření (nacvičované v minulé hodině) a výsledek.

Uvedený postup má proti klasickému tyto výhody:

- Musí se při něm přemýšlet.
- Je třeba si rozmyslet, zda vůbec jde o přímou úměrnost (ta úvaha je zbytečná při probírání přímých úměrností, ale žáci řeší jako přímé úměrnosti mechanicky i mnoho příkladů, které s nimi nemají nic společného – třeba exponenciální závislosti).
- Není třeba si pamatovat nic kromě nutnosti plnění podmínky pro to, aby šlo o přímou úměrnost.

Pedagogická poznámka: V tomto okamžiku přepnu na příklady a řeknu studentům, aby je řešili. Dopředu neupozorňuji, že příklad 11 je na nepřímou úměrnost. Je zajímavé sledovat, kteří studenti to zjistí, kteří příklad spočítají jako přímou úměrnost, ale dojde jim, že výsledek je nesmyslný a kteří spočítají příklad jako přímou úměrnost a ani zjevná nesmyslnost výsledku je netrkne.

Př. 9: Objem 6,25 barelů je roven 1000 litrů. Kolik litrů obsahuje 1 barel?

6,25 barelů … 1000 litrů
1 barel … *x* litrů

Obě veličiny jsou v přímé úměře, pokud každý barel obsahuje stejný počet litrů.

$$\frac{1000}{6,25}=\frac{x}{1}$$

$$x=\frac{1000}{6,25}=160 \text{ litrů}$$

1 barel obsahuje 160 litrů.

Poznámka: Obě čísla jsme mohli vydělit rovnou.

Př. 10: Auto má průměrnou spotřebu 5,3 l na 100 km. Kolik nafty spotřebuje při cestě dlouhé 265 km?

100 km … 5,3 l
265 km … *x* l

Obě veličiny jsou v přímé úměře, pokud je spotřeba na každém kilometru stejná.

$$\frac{5,3}{100}=\frac{x}{265}$$

$$x=\frac{5,3}{100}\cdot 265=14,045 \text{ l}$$

Auto spotřebuje při jízdě 14 litrů nafty.

Nepřímá úměrnost

Nepřímá úměrnost je závislost mezi dvěma veličinami, pro kterou platí:
kolikrát se zvětší hodnota jedné veličiny, tolikrát se zmenší hodnota druhé („čím víc, tím míň“).

Typický příklad – rozdělování peněz. Kdyby se výhra rozdělila mezi 15 studentů, na každého by připadlo 2500 Kč. Kolik by připadlo na každého studenta, kdyby jich bylo pouze 7?

Čím víc studentů, tím méně peněz dostane každý z nich $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost.

Jaké podmínky příklad splňuje:
- všichni musí dostat stejně (podobné jako u přímé úměrnosti),
- peněz je pořád stejné množství (to u přímé úměrnosti není!!!).

Zkusíme vyřešit příklad.

Př. 11: Kdyby se výhra rozdělila mezi 15 studentů, na každého by připadlo 2500 Kč. Kolik by připadlo na každého studenta, kdyby jich bylo pouze 7?

15 studentů … 2500 Kč
7 studentů … x Kč

počet peněz rozdělených mezi 15 studentů $15 \cdot 2500$
počet peněz rozdělených mezi 7 studentů $7 \cdot x$

Počty jsou stejné: $15 \cdot 2500 = 7 \cdot x$.

$$x = \frac{15 \cdot 2500}{7} \doteq 5357\,\text{Kč}$$

Mezi 7 studentů by se rozdělilo po 5357 Kč.

Př. 12: Výprava měla připraveny potraviny pro 25 lidí na 60 dní. Kvůli onemocnění nakonec odjelo pouze 20 účastníků. Kolik dní jim zásoby vystačí?

25 účastníků … 60 dní
20 účastníků … x dní

Jídla je stále stejné množství: $25 \cdot 60 = 20 \cdot x$.

$$x = \frac{25 \cdot 60}{20} = 75\,\text{dní}$$

Zmenšené expedici vystačí jídlo na 75 dní.

Př. 13: Automobil jezdí s průměrnou spotřebou 5,3 litru na 100 km, ujede na plnou nádrž 800 km. Jakou vzdálenost by ujel, kdyby spotřeba klesla na 4,9 litru na 100 km?

5,3 litru … 800
4,9 litru … x km

V obou případech mám stejně plnou nádrž: $5{,}3 \cdot 800 = 4{,}9 \cdot x$.

$$x = \frac{5{,}3 \cdot 800}{4{,}9}\,\text{km} = 865\,\text{km}$$

Auto by při spotřebě 4,9 litru na 100 km ujel 865 km.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je pro studenty nečekaně obtížný. Pokud řeší příklady mechanicky, nedokážou se vyrovnat s výskytem hodnoty 100 km a neustále ji započítávají do úměry.

Př. 14: V 22,4 litru plynu je $6{,}023 \cdot 10^{23}$ molekul. Urči počet molekul plynu v 1 litru plynu.

22,4 litru … $6{,}023 \cdot 10^{23}$ molekul
1 litr … x molekul

Obě veličiny jsou v přímé úměře, pokud je v každém litru stejné množství molekul.

$$\frac{6,023 \cdot 10^{23}}{22,4} = \frac{x}{1}$$

$$x = \frac{6,023 \cdot 10^{23}}{22,4} = 2,69 \cdot 10^{22} \text{ molekul}$$

V 1 litru vzduchu je $2,69 \cdot 10^{22}$ molekul.

Poznámka: Obě čísla jsme mohli vydělit rovnou.

Pedagogická poznámka: Poslední příklad není určen většině třídy. Ti lepší se snad vypořádají i s exponenciálním tvarem čísla, který v tomto okamžiku dělá žákům problémy a je zbytečné s ním ztrácet čas.

Shrnutí: U přímé úměrnosti je poměr obou veličin stálý. U nepřímé úměrnosti je stálé množství toho, co "rozdělujeme".